УДК 373.5.016:519.21]:004.853
DOI 10.31494/2412-9208-2020-1-1-330-340

COMPUTER SUPPORT FOR THE STUDY OF THE TOPIC “LEAST SQUARES METHOD” OF THE DISCIPLINE “PROBABILITY THEORY WITH ELEMENTS OF MATHEMATICAL STATISTICS”

КОМП’ЮТЕРНА ПІДТРИМКА ВИВЧЕННЯ ТЕМИ “МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ”КУРСУ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ІЗ ЕЛЕМЕНТАМИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Oleksiy KRASNOZHON,
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor

Олексій КРАСНОЖОН,
кандидат педагогічних наук, доцент

https://orcid.org/0000-0002-9699-6038
mypostnew@ukr.net

Berdiansk State Pedagogical University
✉ 4 Schmidta St., Berdiansk, Zaporizhzhia region, 71100

Бердянський державний педагогічний університет
✉ вул. Шмідта, 4, м. Бердянськ, Запорізька обл., 71100

Original manuscript received: February 01, 2020
Revised manuscript accepted: March 02, 2020

ABSTRACT

The article is devoted to the problem of developing the components of an effective computer-oriented methodological system of teaching the discipline "Probability theory with elements of mathematical statistics", which is provided by the curriculum for the training of future mathematics teachers. The article discusses the methodological and algorithmic aspect of the organization of calculations in the process of applying the least squares method to determine the functional dependence between the features of the sample of the general totality in the mathematical program environment Mathcad. Detailed examples of solving the problems of equating the values of a sample of a general totality along a first-degree polynomial (linear dependence), a second-degree polynomial (parabola), and a third-degree polynomial (cubic parabola) are given. The theoretical foundations of the least squares method are presented. A brief review of the educational and methodological literature used in teaching the theory of probabilities with elements of mathematical statistics is carried out, the expediency of using mathematical software in the study of the content of the specified discipline is substantiated. Provisions have been formulated on the need to develop test problems of varying degrees of complexity in probability theory with elements of mathematical statistics in order to objectively evaluate students' academic achievement. The article contains the useful implementations of the least-squares method in the Mathcad software environment; conclusions and directions of further scientific and pedagogical research in the field of implementation of computational methods of mathematical statistics when finding statistical estimates of a sample of values of a random variable of the general totality. The methodical and algorithmic materials presented in the article can be useful to students for organizing and activating independent scientific-pedagogical activity, teachers of secondary educational institutions, heads of facultative and circle work of students, teachers of the theory of probability courses with elements of mathematical statistics.

Key words: *least squares method, statistical sampling, general totality, probability theory, elements of mathematical statistics.*

Вступ. Сучасна вища педагогічна освіти характеризується впровадженням широкого спектру інновацій, покликаних забезпечити якість, доступність, об’єктивність, індивідуалізацію, дистанційність та професійну спрямованість підготовки майбутнього фахівця. Зрозуміло, що досягнення зазначених вимог неможливе без застосування інформаційно-комунікаційних технологій в освітньому процесі. Особливу увагу слід звернути на специфіку підготовки майбутнього вчителя математики, оскільки саме ці дисципліни покликані забезпечити фахівця арсеналом засобів та методів, достатніх для розв’язання широкого класу задач з опрацювання емпіричних даних, отриманих у ході педагогічного експерименту чи будь-якої іншої науково-дослідної методичної роботи. У цьому аспекті провідна роль належить навчальній дисципліні “Теорія ймовірностей із елементами математичної статистики”. Згідно з навчальним планом дисципліна “Теорія ймовірностей із елементами математичної статистики” викладається в п’ятому семестрі третього року підготовки здобувачів першого рівня вищої освіти спеціальності 014 Середня освіта (Математика). Обсяг курсу становить 180 годин (6 кредитів ECTS) і має на меті ознайомити майбутніх учителів математики із завданнями та методами теорії ймовірностей та математичної статистики в обсязі, достатньому для успішного практичного використання отриманих знань у подальшій роботі за спеціальністю. Задачі математичної статистики, які розглядаються в змістовому модулі “Елементи математичної статистики”, є найбільш ємними щодо математичних обчислень та потребують використання математичних програмних середовищ, оскільки виконання таких обчислень на калькуляторі вкрай нерезультативне та обумовлює виникнення обчислювальних помилок через людський фактор. Крім того, накопичені обчислювальні похибки можуть спотворити результати статистичної обробки експериментальних даних і призвести до хибних інтерпретацій статистичних гіпотез. Для подолання зазначених негативних явищ вважаємо за доцільне створення алгоритмічних реалізацій методів математичної статистики в математичних програмних середовищах, що дозволить значно підсилити результативність та продуктивність аудиторної роботи студентів.

Методи та методики дослідження. Розробці обчислювальних реалізацій числових методів присвячені окремі підручники, навчальні посібники та практикуми, зокрема, посібник для вчителів (Zhaldak, 1997), підручники (Lyashchenko, 1996), (Tkach, 2009), навчальні посібники (Kovalenko, 2011), (Marmosa, 2004), (Ryabushko, 2010), практикум (Litvin, 2006).

У підручнику (Lyashchenko, 1996) розглянуто методи алгебри і математичного аналізу, лінійного програмування та статистичної обробки результатів експерименту. Для більшості чисельних методів побудовано алгоритми, які реалізуються на комп’ютері. Наведені алгоритми можуть бути реалізовані в сучасних мовах програмування і використані студентами у власній науковій та експериментальній роботі. Підручник (Tkach, 2009) містить теоретичні і методичні основи побудови статистичних показників, які використовують для вивчення закономірностей суспільних явищ з урахуванням міжнародних стандартів статистики та обліку. Особливу увагу приділено статистичній методології, можливостям її використання в умовах

DOI 10.31494/2412-9208-2020-1-1

суттєвих змін в економіці. Посібник для вчителів (Zhaldak, 1997) має на меті розкрити методичні та алгоритмічні аспекти використання засобів сучасних інформаційних технологій під час вивчення алгебри та початків аналізу в середніх навчальних закладах із поглибленим вивченням різних дисциплін. У посібнику (Kovalenko, 2011) викладено елементи основних розділів вищої математики, зокрема, елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики. Теоретичний матеріал супроводжується розв'язанням конкретних прикладів. Навчальний посібник (Ryabushko, 2010) спрямований на розвиток та активізацію самостійної роботи студентів з опанування курсом вищої математики, зокрема, таких її розділів, як теорія ймовірностей та математична статистика. У посібнику (Marmosa, 2004) розглядаються статистичні розподіли та їх характеристики, статистична оцінка параметрів розподілу, перевірка статистичних гіпотез, дисперсійний і кореляційний аналіз тощо, а також основні методи і прийоми обробки результатів спостережень. Практикум (Litvin, 2006) містить розв'язання типових задач курсу "Чисельні методи" з реалізацією в системі Mathcad та завдання для самостійної роботи. Аналіз наукових публікацій дає підстави для виділення недостатньо досліджених компонентів методичної проблеми щодо створення програмних реалізацій методів математичної статистики в програмних середовищах. Зазначеним компонентам присвячується наша стаття.

Стаття має на меті запропонувати програмні реалізації в середовищі Mathcad методу найменших квадратів; подати приклади його застосування в процесі математичної підготовки фахівців як математичних, так і нематематичних спеціальностей, оскільки їх рівень іноді недостатній для усвідомлення теоретичних основ побудови статистичних методів. Специфіка створення обчислювальних модулів з використанням вбудованих математичних функцій середовища Mathcad сприятиме формуванню алгоритмічної культури студентів, фахова підготовка яких передбачає опанування методами математичної статистики. Методичні та математичні аспекти розробки обчислювальних модулів в середовищі Mathcad становлять сутність досліджуваного явища.

Результати та дискусії. Наведемо приклад застосування методу найменших квадратів для розв'язання задач математичної статистики. Постановка задачі: нехай залежність *y* від *x* виражається формулою $y = f\left(x, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\right)$, де $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – невідомі параметри, які підлягають визначенню. У результаті *n* незалежних дослідів за заданими значеннями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ змінної *x* отримано відповідні значення $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функції *y*. Вважають, що найбільш вірогідні значення для параметрів $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ дає мінімум функції цих параметрів $S(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\right)\right)^2$. Необхідні умови мінімуму функції *S* записуються у вигляді системи $(m+1)$-го рівняння:

ICV 2018: 77.58
DOI 10.31494/2412-9208-2020-1-1

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_0}=0,\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_m}=0.$$

Знаходження залежності між *Y* та *X* за результатами експерименту називають ***вирівнюванням*** емпіричних даних вздовж кривої $y=f(x,\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$. На практиці функція $f(x,\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ задається у такому вигляді, що параметри $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ входять до неї лінійно. Тому $f(x,\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ має неперервні частинні похідні за усіма параметрами α_i, $i=\overline{0,m}$. Наприклад, $f(x,\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_m x^m$. У такому випадку система рівнянь з необхідних умов мінімуму функції *S* записуються у вигляді:

$$\begin{cases} \alpha_0 n+\alpha_1\sum_{i=1}^{n}x_i+\ldots+\alpha_m\sum_{i=1}^{n}x_i^m=\sum_{i=1}^{n}y_i, \\ \alpha_0\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\ldots+\alpha_m\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+1}=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_0\sum_{i=1}^{n}x_i^m+\alpha_1\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+1}+\ldots+\alpha_m\sum_{i=1}^{n}x_i^{2m}=\sum_{i=1}^{n}x_i^m y_i. \end{cases}$$

Зокрема, за заданими експериментальними точками $M(x_i,y_i)$, $i=\overline{0,n}$ можна знайти оцінки параметрів лінійної функції $y=\alpha_0+\alpha_1 x$. Система лінійних рівнянь з необхідних умов мінімуму функції *S* у цьому випадку набирає вигляд:

$$\begin{cases} \alpha_0 n+\alpha_1\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i, \\ \alpha_0\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i. \end{cases}$$

Якщо за дослідними точкам $M(x_i,y_i)$, $i=\overline{0,n}$ шукати оцінки для параметрів $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ залежності $y=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2$, то система рівнянь з необхідних умов мінімуму функції $S(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)$ набирає вигляд:

DOI 10.31494/2412-9208-2020-1-1

$$\begin{cases} \alpha_0 n + \alpha_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \alpha_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ \alpha_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \alpha_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \alpha_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ \alpha_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \alpha_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + \alpha_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \end{cases}$$ (Ryabushko, 2010: 249-250)

Приклад 1. У результаті експерименту отримано значення випадкової величини *Y* за заданими значеннями випадкової величини *X*:

X	0	4	7	12	16	20	25	31	37
Y	34,7	42,3	47,5	56,9	62,1	70,6	81,9	91,5	101,7

Знайти лінійну залежність $y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ за методом найменших квадратів.

Розв'язування. За результатами експерименту складаємо обчислювальну таблицю значень випадкових величин *X* та *Y* (рис. 1):

ORIGIN := 1

$n := 9 \quad i := 1..n$

$x_1 := 0 \quad x_2 := 4 \quad x_3 := 7 \quad x_4 := 12 \quad x_5 := 16 \quad x_6 := 20 \quad x_7 := 25 \quad x_8 := 31 \quad x_9 := 37$

$y_1 := 34.7 \quad y_2 := 42.3 \quad y_3 := 47.5 \quad y_4 := 56.9 \quad y_5 := 62.1 \quad y_6 := 70.6 \quad y_7 := 81.9 \quad y_8 := 91.5 \quad y_9 := 101.7$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \\ 12 \\ 16 \\ 20 \\ 25 \\ 31 \\ 37 \end{pmatrix} \qquad y \rightarrow \begin{pmatrix} 34.7 \\ 42.3 \\ 47.5 \\ 56.9 \\ 62.1 \\ 70.6 \\ 81.9 \\ 91.5 \\ 101.7 \end{pmatrix} \qquad \left(x_i\right)^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 49 \\ 144 \\ 256 \\ 400 \\ 625 \\ 961 \\ 1369 \end{pmatrix} \qquad \left(x_i \cdot y_i\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 169.2 \\ 332.5 \\ 682.8 \\ 993.6 \\ 1412.0 \\ 2047.5 \\ 2836.5 \\ 3762.9 \end{pmatrix}$$

$$\sum_i x_i = 152 \qquad \sum_i y_i = 589.2 \qquad \sum_i \left(x_i\right)^2 = 3.82 \times 10^3 \qquad \sum_i \left(x_i \cdot y_i\right) = 1.2237 \times 10^4$$

Рис. 1. *Обчислювальна таблиця значень випадкових величин X та Y*

Оскільки $n = 9$, то система рівнянь з необхідних умов мінімуму функції *S* набирає вигляд:

$$\begin{cases} 9\alpha_0 + 152\alpha_1 = 589{,}2; \\ 152\alpha_0 + 3820\alpha_1 = 12237. \end{cases}$$

Розв'язавши отриману систему лінійних рівнянь з необхідних умов мінімуму функції *S* методом Гаусса, отримуємо шукані значення параметрів α_0, α_1 лінійної залежності *Y* від *X* за методом найменших

ICV 2018: 77.58
DOI 10.31494/2412-9208-2020-1-1

квадратів (рис. 2):

$$A := \begin{bmatrix} n & \sum_i x_i & \sum_i y_i \\ \sum_i x_i & \sum_i (x_i)^2 & \sum_i x_i \cdot y_i \end{bmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 9 & 152 & 589.2 \\ 152 & 3820 & 12237 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 34.651 \\ 0 & 1 & 1.825 \end{pmatrix}$$

Рис. 2. *Розв'язування системи рівнянь методом Гаусса*

Отже, лінійна залежність *Y* від *X*, отримана за методом найменших квадратів, набирає вигляд: $y(x) = 34{,}651 + 1{,}825x$.

Відповідь: $y(x) = 34{,}651 + 1{,}825x$.

Приклад 2. Значення деякої ознаки *Y* за значеннями ознаки *X* характеризуються даними експерименту:

X	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Y	14,1	10,4	7,8	5,6	4,2	3,1	2,4	3,2	3,9	5,8

Вирівняти залежність *Y* від *X* вздовж параболи $y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$.

Розв'язування. Для отримання системи рівнянь з необхідних умов мінімуму функції $S(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ записуємо розрахункову таблицю, сформовану у програмному середовищі Mathcad (рис. 3):

$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

$$n := 10 \quad i := 1..n \quad x_i := i - 6$$

$$y_1 := 14.1 \quad y_2 := 10.4 \quad y_3 := 7.8 \quad y_4 := 5.6 \quad y_5 := 4.2 \quad y_6 := 3.1 \quad y_7 := 2.4 \quad y_8 := 3.2 \quad y_9 := 3.9 \quad y_{10} := 5.8$$

$$x \to \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad y \to \begin{pmatrix} 14.1 \\ 10.4 \\ 7.8 \\ 5.6 \\ 4.2 \\ 3.1 \\ 2.4 \\ 3.2 \\ 3.9 \\ 5.8 \end{pmatrix} \quad (x_i)^2 \to \begin{pmatrix} 25 \\ 16 \\ 9 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} \quad (x_i)^3 \to \begin{pmatrix} -125 \\ -64 \\ -27 \\ -8 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \\ 27 \\ 64 \end{pmatrix} \quad (x_i)^4 \to \begin{pmatrix} 625 \\ 256 \\ 81 \\ 16 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 16 \\ 81 \\ 256 \end{pmatrix} \quad (x_i \cdot y_i) \to \begin{pmatrix} .49 \\ 1.4 \\ 5.7 \\ 11.6 \\ 27.5 \\ 56.4 \\ 79.1 \end{pmatrix} \quad \left[(x_i)^2 \cdot y_i\right] \to \begin{pmatrix} 352.5 \\ 166.4 \\ 70.2 \\ 22.4 \\ 4.2 \\ 0 \\ 2.4 \\ 12.8 \\ 35.1 \\ 92.8 \end{pmatrix}$$

$$\sum_i x_i = -5 \quad \sum_i y_i = 60.5 \quad \sum_i (x_i)^2 = 85 \quad \sum_i (x_i)^3 = -125 \quad \sum_i (x_i)^4 = 1.333 \times 10^3 \quad \sum_i (x_i \cdot y_i) = -107.2 \quad \sum_i \left[(x_i)^2 \cdot y_i\right] = 758.8$$

Рис. 3. *Розрахункова таблиця*

За результатами обчислень записуємо систему трьох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 10\alpha_0 - 5\alpha_1 + 85\alpha_2 = 60{,}5; \\ -5\alpha_0 + 85\alpha_1 - 125\alpha_2 = -107{,}2; \\ 85\alpha_0 - 125\alpha_1 + 1333\alpha_2 = 758{,}8. \end{cases}$$

ICV 2018: 77.58
DOI 10.31494/2412-9208-2020-1-1

Розв'язування отриманої системи лінійних рівнянь виконуємо в програмному середовищі Mathcad, використовуючи метод Гаусса. Вбудована матрична функція *rref(A)* дозволяє в автоматичному режимі шляхом елементарних перетворень рядків розширеної матриці *A* системи рівнянь отримати східчасту матрицю рівносильної системи рівнянь, з якої визначаємо значення параметрів $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ шуканої параболи (рис. 4).

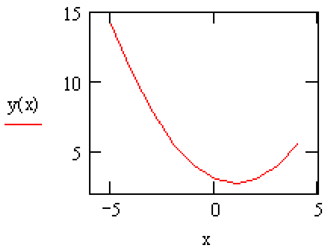
$$A := \begin{bmatrix} n & \sum_i x_i & \sum_i (x_i)^2 & \sum_i y_i \\ \sum_i x_i & \sum_i (x_i)^2 & \sum_i (x_i)^3 & \sum_i x_i \cdot y_i \\ \sum_i (x_i)^2 & \sum_i (x_i)^3 & \sum_i (x_i)^4 & \sum_i \left[(x_i)^2 \cdot y_i\right] \end{bmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 85 & 60.5 \\ -5 & 85 & -125 & -107.2 \\ 85 & -125 & 1333 & 758.8 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3.04424 \\ 0 & 1 & 0 & -0.6153 \\ 0 & 0 & 1 & 0.31742 \end{pmatrix}$$

Рис. 4. *Розв'язування системи трьох лінійних рівнянь за методом Гаусса*

Таким чином, шукана зрівняна вздовж параболи залежність *Y* від *X* має вигляд: $y(x) = 3{,}0442 - 0{,}6153x + 0{,}3174x^2$. Графік зрівняної вздовж параболи залежності *Y* від *X* подано на рис. 5.

$$\mathrm{ORIGIN} := 1 \quad n := 10 \quad i := 1..n \quad x_i := i - 6$$

$$y(x) := 3.0442 - 0.6153x + 0.3174x^2$$



$$y_i := y(x_i)$$

$$x^T \to (-5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$$

$$y^T \to (14.0557 \quad 10.5838 \quad 7.7467 \quad 5.5444 \quad 3.9769 \quad 3.0442 \quad 2.7463 \quad 3.0832 \quad 4.0549 \quad 5.6614)$$

Рис. 5. *Графік зрівняної вздовж параболи залежності Y від X*

На рис. 5 також наведені значення функції $y(x) = 3{,}0442 - 0{,}6153x + 0{,}3174x^2$ в точках x_i, $i = 1,2,\ldots,10$. Як легко бачити, значення функції $y(x) = 3{,}0442 - 0{,}6153x + 0{,}3174x^2$ для значень ознаки *X* майже збігаються із відповідними значеннями ознаки *Y* з умови прикладу.

ICV 2018: 77.58
DOI 10.31494/2412-9208-2020-1-1

Відповідь: $y(x) = 3{,}0442 - 0{,}6153x + 0{,}3174x^2$.

Приклад 3. Залежність ознаки *Y* від ознаки *X* характеризується такими експериментальними даними:

X	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
Y	–5,6	–3,7	–2,3	–0,9	0,2	1,3	2,5	3,7	4,8	6,2	8,1

Методом найменших квадратів знайти коефіцієнти залежності $y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$. Побудувати графік отриманої функціональної залежності.

Розв'язування. У програмному середовищі Mathcad формуємо таблицю емпіричних даних (рис. 6):

$\mathrm{ORIGIN} := 1$

$n := 11 \quad i := 1..n$

$x_i := i - 6$

$y_1 := -5.6 \quad y_2 := -3.7 \quad y_3 := -2.3 \quad y_4 := -0.9 \quad y_5 := 0.2 \quad y_6 := 1.3 \quad y_7 := 2.5 \quad y_8 := 3.7 \quad y_9 := 4.8 \quad y_{10} := 6.2 \quad y_{11} := 8.1$

$x^T \rightarrow (-5\ \ -4\ \ -3\ \ -2\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5)$

$y^T \rightarrow (-5.6\ \ -3.7\ \ -2.3\ \ -.9\ \ .2\ \ 1.3\ \ 2.5\ \ 3.7\ \ 4.8\ \ 6.2\ \ 8.1)$

Рис. 6. *Таблиця емпіричних даних*

Система чотирьох лінійних рівнянь з необхідних умов мінімуму функції *S* набирає вигляд:

$$\begin{cases} 11\alpha_0 + 110\alpha_2 = 14{,}3; \\ 110\alpha_1 + 1958\alpha_3 = 140{,}9; \\ 110\alpha_0 + 1958\alpha_2 = 138{,}9; \\ 1958\alpha_1 + 41030\alpha_3 = 2576{,}9. \end{cases}$$

Розв'язування отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса ілюструє рис.7:

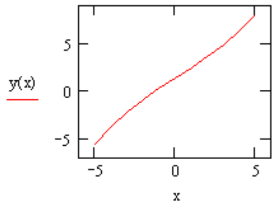
$$A := \begin{bmatrix} n & \sum_i x_i & \sum_i (x_i)^2 & \sum_i (x_i)^3 & \sum_i y_i \\ \sum_i x_i & \sum_i (x_i)^2 & \sum_i (x_i)^3 & \sum_i (x_i)^4 & \sum_i x_i \cdot y_i \\ \sum_i (x_i)^2 & \sum_i (x_i)^3 & \sum_i (x_i)^4 & \sum_i (x_i)^5 & \sum_i (x_i)^2 \cdot y_i \\ \sum_i (x_i)^3 & \sum_i (x_i)^4 & \sum_i (x_i)^5 & \sum_i (x_i)^6 & \sum_i (x_i)^3 \cdot y_i \end{bmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 110 & 0 & 14.3 \\ 0 & 110 & 0 & 1958 & 140.9 \\ 110 & 0 & 1958 & 0 & 138.9 \\ 0 & 1958 & 0 & 41030 & 2576.9 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1.3478 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.0824 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.0048 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.0111 \end{pmatrix}$$

Рис. 7. *Розв'язування системи чотирьох лінійних рівнянь методом Гаусса*

Отже, шукана залежність ознаки *Y* від ознаки *X* має вигляд: $y(x) = 1{,}3478 + 1{,}0824x - 0{,}0048x^2 + 0{,}0111x^3$. Графік отриманої функції ілюструє рис.8. Під графіком наведено значення функції $y(x)$ (випадкової величини *Y*), обчислені для відповідних значень *x* (випадкової величини *X*).

DOI 10.31494/2412-9208-2020-1-1

$y(x) := 1.3478 + 1.0824 \cdot x - 0.0048x^2 + 0.0111x^3$



$x^T \to (-5\ \ -4\ \ -3\ \ -2\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5)$

$y_i := y(x_i)$

$y^T \to (-5.5717\ \ -3.7690\ \ -2.2423\ \ -.9250\ \ .2495\ \ 1.3478\ \ 2.4365\ \ 3.5822\ \ 4.8515\ \ 6.3110\ \ 8.0273)$

Рис. 8. *Графік функціональної залежності ознаки Y від ознаки X*

Відповідь: $y(x) = 1{,}3478 + 1{,}0824x - 0{,}0048x^2 + 0{,}0111x^3$.

Висновки. Під час розв’язування задач математичної статистики досить часто доводиться виконувати значний обсяг обчислювальний роботи, який викликає перенапруження та швидко стомлює виконавця. Крім того, обчислювальні операції потребують постійної концентрації та часового ресурсу, отже, їх виконання протягом аудиторного заняття є малопродуктивним і недостатньо ефективним. Виникає потреба в алгоритмізації та інтенсифікації зазначених операцій, розробці відповідних алгоритмів у математичних середовищах, які дозволили б швидко і з наперед заданою точністю розв’язувати подібні задачі, що є вкрай важливим для експериментатора-дослідника; надавали б останньому потужний та надійний засіб опрацювання даних педагогічного чи фізичного експерименту або будь-яку статистичну інформацію. У таких випадках користуються алгоритмічними реалізаціями методів математичної статистики в математичних програмних середовищах. Створення подібних реалізацій і обґрунтування доцільності їх використання ми відносимо до результатів нашого дослідження. Основні висновки дослідження містять такі положення:

- розв’язання задач математичної статистики з використанням математичних програмних засобів формує в студентів педагогічних закладів вищої освіти широкий спектр алгоритмічних прийомів загального характеру, цінних для математичного розвитку особистості, і таких, що можуть бути застосованими і на будь-якому іншому математичному матеріалі;
- наведені в статті реалізації методу найменших квадратів є методичним напрацюванням, корисним для студентів та викладачів педагогічних закладів вищої освіти;
- систематичне і методично виправдане використання математичних програмних засобів у процесі навчання математичних дисциплін сприятиме розв’язанню проблеми неефективного використання навчального часу.

ICV 2018: 77.58
DOI 10.31494/2412-9208-2020-1-1

На нашу думку, перспективним напрямом подальшого наукового пошуку є розробка багатоваріантних різнорівневих задач з курсу теорії ймовірностей із елементами математичної статистики, покликаних забезпечити формування і розвиток уміння студентів педагогічних вищих навчальних закладів розв'язувати задачі з використанням математичних програмних засобів.

Література

1. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики : посібник для вчителів / Мирослав Іванович Жалдак. – К. : Техніка, 1997. – 303 с.

2. Коваленко І. П. Вища математика. Навчальний посібник. / Іван Панасович Коваленко. – К. : Видавничий Дім «Слово», 2011. – 456 с.

3. Литвин О. М. Практикум з курсів "Математичні методи та моделі в розрахунках на ПЕОМ" і "Чисельні методи" (із застосуванням системи Mathcad) : навчальний посібник. / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова. – Харків : УІПА, 2006. – 153 с.

4. Лященко М. Я. Чисельні методи : підручник. /М. Я. Лященко, М. С. Головань. – К. : Либідь, 1996. – 288 с.

5. Мармоза А. Т. Практикум з математичної статистики : Навч. посіб. / Анатолій Тимофійович Мармоза. – К. : Кондор, 2004. – 264 с.

6. Рябушко А. П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч. 4. Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика : учеб. пособие / Антон Петрович Рябушко. – 3 изд. – Минск : Выш. шк., 2010. – 336 с.

7. Ткач Є.І Загальна теорія статистики : підручник [для студ. вищ. навч. закл.] / Євген Іванович Ткач, Володимир Петрович Сторожук. – [3-тє вид.] – К. : Центр учбової літератури, 2009. – 442 с.

References

1. Zhaldak, M. (1997). Computer in Maths Lesson : A Manual for Teachers. Kyiv : *Technics* [in Ukrainian].

2. Kovalenko, I. (2011). Higher mathematics. Tutorial. Kyiv : *Slovo Publishing House* [in Ukrainian].

3. Litvin O, Lobanova L. (2006). Workshop of courses "Mathematical Methods and Models in Calculus on Computer" and "Numerical Methods" (using Mathcad). Tutorial. Kharkiv : *Ukrainian Academy of Engineering and Pedagogy* [in Ukrainian].

4. Lyashchenko, M. Golovan, M. (1996). Numerical methods : A Textbook. Kyiv : *Swan* [in Ukrainian].

5. Marmoza, A. (2004). Workshop of Mathematical Statistics. Textbook. Kyiv : *Condor* [in Ukrainian].

6. Ryabushko, A. (2010). Individual assignments in higher mathematics. At 4 parts. Part 4. Operating calculation. Elements of stability theory. Probability theory. Mathematical statistics. A Textbook. Minsk : *Higher School* [in Belarus].

7. Tkach, E., Storozhuk, V. (2009). General theory of statistics. A Textbook. Kyiv : *Center for Educational Literature* [in Ukrainian].

АНОТАЦІЯ

Стаття присвячена проблемі розробки компонентів ефективної комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання дисципліни "Теорія ймовірностей із елементами математичної статистики", яка передбачена навчальним планом підготовки майбутніх учителів математики. Розглянуто методичні та алгоритмічні аспекти організації обчислень у процесі застосування методу найменших квадратів для визначення функціональної залежності між

DOI 10.31494/2412-9208-2020-1-1

ознаками вибірки генеральної сукупності в математичному програмному середовищі Mathcad. Подано детальні приклади розв'язування задач про вирівнюванні значень ознак вибірки генеральної сукупності вздовж поліному першого степеня (лінійна залежність), поліному другого степеня (параболі) та поліному третього степеня (кубічній параболі). Наведено теоретичні основи методу найменших квадратів. Здійснено стислий огляд навчально-методичної літератури, яка використовується під час викладання курсу теорії ймовірностей із елементами математичної статистики, обґрунтована доцільність застосування математичних програмних засобів під час опрацювання змісту зазначеної дисципліни. Сформульовано положення про необхідність розробки тестових завдань різного рівня складності з теорії ймовірностей із елементами математичної статистики з метою об'єктивного оцінювання навчальних досягнень студентів. Стаття містить опис реалізації методу найменших квадратів у програмному математичному середовищі Mathcad; висновки і напрями подальшого науково-педагогічного дослідження в галузі реалізації обчислювальних методів математичної статистики при знаходженні статистичних оцінок вибірки значень випадкової величини генеральної сукупності. Методичні та алгоритмічні матеріали можуть бути корисними студентам для організації та активізації самостійної науково-педагогічного діяльності, учителям середніх навчальних закладів, керівникам факультативної й гурткової роботи учнів, викладачам курсу теорії ймовірностей із елементами математичної статистики педагогічних вищих навчальних закладів.

Ключові слова: *метод найменших квадратів, статистична вибірка, генеральна сукупність, теорія ймовірностей, елементи математичної статистики.*

DOI 10.31494/2412-9208-2020-1-1