УДК 378.011.3-051:51]:001.895
DOI 10.31494/2412-9208-2021-1-2-255-262

COMPUTER-ORIENTED ELEMENTS OF TEACHING MATHEMATICAL DISCIPLINES OF FUTURE MATHEMATICS TEACHERS

КОМП'ЮТЕРНО-ОРІЄНТОВАНІ ЕЛЕМЕНТИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Oleksii KRASNOZHON,
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor

Олексій КРАСНОЖОН,
кандидат педагогічних наук, доцент

mypostnew@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-9699-6038

Vasyl MATSIUK,
Candidate of Pedagogical Sciences

Василь МАЦЮК,
кандидат педагогічних наук

vasyl.matsyuk@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-0957-963X

Berdiansk State Pedagogical University
✉ 4,Schmidta st., Berdiansk, Zaporizhzhia region, 71100

Бердянський державний педагогічний університет
✉ вул. Шмідта, 4, м. Бердянськ, Запорізька обл., 71100

Original manuscript received: June 9, 2021
Revised manuscript accepted: September 15, 2021

ABSTRACT

The article is devoted to the issues of constructing effective computer-oriented components of the methodological system of teaching the disciplines «Linear Algebra» and «Probability Theory with Elements of Mathematical Statistics» provided for in the educational and professional program «Secondary Education (Mathematics)» of the first level of higher education in the specialty 014 Secondary Education (Mathematics). The article analyzes the methodological aspects of the effective organization of computations when finding the angle between a given vector and a nonzero subspace of Euclidean space, as well as using the least squares method for processing experimental data. The theoretical and practical information known to students-mathematicians from the corresponding sections of these academic disciplines is briefly presented. Analyzed educational, methodological and scientific literature used in teaching linear algebra and probability theory with elements of mathematical statistics; the expediency of using computer-oriented elements of teaching mathematical disciplines of future mathematics teachers has been substantiated. The authors proposed the use of computer-oriented learning elements in the processing of the content of disciplines and the development of test tasks of different levels of complexity in linear algebra and probability theory with elements of mathematical statistics in order to objectively assess the level of students' knowledge and timely correct individual educational trajectories. The article provides examples of the application of computer-oriented elements of teaching linear algebra and probability theory with elements of mathematical statistics, and also analyzes the methodological features of the organization of calculations in the software mathematical environment Mathcad. The methodological and practical materials *presented in the article can be useful for students to organize and activate independent scientific and pedagogical activities, teachers of secondary educational institutions, heads of optional and circle work of students, teachers of linear algebra and probability theory courses with elements of mathematical statistics of pedagogical higher educational institutions.*

***Key words:** methods of teaching mathematics, computer-oriented elements of teaching mathematics, linear algebra, probability theory, mathematical statistics, Euclidean space, non-zero subspace of Euclidean space, least squares method.*

Вступ. Значна кількість математичних дисциплін, кожна з яких має свої зміст та специфіку, та широкий арсенал сучасних математичних програмних середовищ обумовлюють комплексну проблему добору найбільш простих, ефективних і адаптованих засобів, на основі використання яких педагоги-новатори реалізують авторські комп'ютерно-орієнтовані елементи навчання. Специфіка підготовки майбутнього вчителя математики заслуговує на особливу увагу, оскільки згадана освітня галузь відчуває особливу потребу в обчислювальних середовищах для розв'язання широкого класу задач з обробки тих чи інших громіздких масивів числових даних. Епоха діджиталізації ставить перед студентом-математиком завдання опанувати такі обчислювальні середовища і з їхньою допомогою використовувати більш продуктивно навчальний час, обсяг і облік якого суворо регламентовані відповідними нормативними документами. Як свідчить практика, значну кількість обчислювальних задач містять, зокрема, такі навчальні дисципліни, як лінійна алгебра та теорія ймовірностей із елементами математичної статистики. Вивчення їх поряд з опануванням інших математичних дисциплін передбачено відповідними освітньо-професійними програмами підготовки вчителя математики. Обчислювальний обсяг задач цих курсів є досить ємним і потребує використання засобів інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ), на основі яких розробляються та імплементуються під час освітнього процесу комп'ютерно-орієнтовані компоненти методичних систем. З метою підвищення результативності та продуктивності аудиторної та самостійної роботи студентів вважаємо за доцільне підсилити роль комп'ютерно-орієнтованих елементів навчання математичних дисциплін. Ураховуючи актуальність та необхідність подолання окресленої проблеми, наше дослідження спрямовується на аналіз методичних аспектів створення та використання зазначених комп'ютерно-орієнтованих елементів навчання математики майбутніх учителів математики.

Методи та методики дослідження. Теоретичним і методичним питанням навчання лінійної алгебри та теорії ймовірностей присвячені окремі навчальні посібники та статті, зокрема, навчальні посібники (Kushlyk-Divulska, Polishchuk, Orel, & Shtabalyuk, 2014; Ogirko, & Galaiko, 2017; Nechaev, 1983; Kovalenko, 2011; Ryabushko, 2010), стаття (Krasnozhon, & Matsyuk, 2020).

ICV 2019: 79.31
DOI 10.31494/2412-9208-2021-1-2

У навчальному посібнику (Kushlyk-Divulska, Polishchuk, Orel, & Shtabalyuk, 2014) наведено детальні алгоритми розв'язання всіх основних задач теорії ймовірностей та математичної статистики, надано чіткі інструкції застосування засобів стандартного програмного забезпечення щодо розв'язання задач із трудомісткими алгоритмами. У посібнику (Ogirko, & Galaiko, 2017) викладено теоретичні відомості з основ теорій ймовірностей, оцінювання невідомих параметрів, перевірки статистичних гіпотез, елементів кореляційно-регресійного аналізу. Посібник (Nechaev, 1983) містить досить детальні розв'язання деяких типових задач зазначеного у назві посібника розділу лінійної алгебри. У посібнику (Kovalenko, 2011) викладено зокрема елементи лінійної і векторної алгебри, теорії ймовірностей та математичної статистики. Навчальний посібник (Ryabushko, 2010) спрямований на розвиток та активізацію самостійної роботи студентів з опанування курсом теорії ймовірностей та математичної статистики.

У статті (Krasnozhon, & Matsyuk, 2020) досліджуються методичні аспекти навчання теми «Кореляційний зв'язок, коефіцієнт кореляції» курсу теорії ймовірностей із елементами математичної статистики та алгоритми розв'язання типових задач теми в математичному програмному середовищі Mathcad.

Стаття має на **меті** проілюструвати розробку та використання комп'ютерно-орієнтованих елементів навчання розв'язання окремих типових задач курсу лінійної алгебри та теорії ймовірностей із елементами математичної статистики. Методична підтримка етапів досягнення зазначеної мети становлять сутність досліджуваного явища.

Результати та дискусії. Наведемо приклад знаходження кута між вектором $\boldsymbol{v} \in E_n$ та ненульовим підпростором евклідового простору E_n, а також приклад знаходження за методом найменших квадратів коефіцієнтів залежності $y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$ ознаки *Y* від ознаки *X* із побудовою графіку отриманої функціональної залежності.

Приклад 1. Знайти кут між вектором $\boldsymbol{v} = (1;0;3;0)$ та лінійним підпростором L, натягнутим на вектори $\boldsymbol{a}_1 = (1;-2;-3;-3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3;4;3;-5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3;1;-4;-13)$.

Розв'язування. З теоретичного курсу лінійної алгебри студентам відомо, що серед усіх векторів даного ненульового лінійного підпростору *L* евклідового простору E_n найменший кут з даним вектором $\boldsymbol{v} \in E_n$ утворює ортогональна проекція ***a*** вектора ***v*** на підпростір *L*. Отже, обчислимо ортогональну проекцію ***a*** вектора ***v*** на підпростір *L*. Дослідимо спочатку на лінійну залежність вектори $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$,

DOI 10.31494/2412-9208-2021-1-2

$\boldsymbol{a}_3$: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 3 & 4 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & -4 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -17 & -34 \end{pmatrix}$. Отже, вектори $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ лінійно незалежні і утворюють базис підпростору L. Подальше розв'язування потребує громіздких обчислень, тому процес ортогоналізації базису $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ підпростору *L*, обчислення проекції ***a*** вектора ***v*** на *L*, обчислення кута φ між вектором ***v*** та підпростором *L* за формулою $\varphi = \arccos\dfrac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{v}| \cdot |\boldsymbol{a}|}$ проілюструємо за допомогою комп'ютера.

$$\mathrm{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{a1} := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{a2} := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{a3} := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{e1} := \mathrm{a1} \qquad \mathrm{e2} := \mathrm{a2} - \frac{\mathrm{e1}\cdot\mathrm{a2}}{\mathrm{e1}\cdot\mathrm{e1}}\cdot\mathrm{e1}$$

$$\mathrm{e3} := \mathrm{a3} - \frac{\mathrm{e1}\cdot\mathrm{a3}}{\mathrm{e1}\cdot\mathrm{e1}}\cdot\mathrm{e1} - \frac{\left(\mathrm{a2} - \frac{\mathrm{e1}\cdot\mathrm{a2}}{\mathrm{e1}\cdot\mathrm{e1}}\cdot\mathrm{e1}\right)\cdot\mathrm{a3}}{\left(\mathrm{a2} - \frac{\mathrm{e1}\cdot\mathrm{a2}}{\mathrm{e1}\cdot\mathrm{e1}}\cdot\mathrm{e1}\right)\cdot\left(\mathrm{a2} - \frac{\mathrm{e1}\cdot\mathrm{a2}}{\mathrm{e1}\cdot\mathrm{e1}}\cdot\mathrm{e1}\right)}\cdot\left(\mathrm{a2} - \frac{\mathrm{e1}\cdot\mathrm{a2}}{\mathrm{e1}\cdot\mathrm{e1}}\cdot\mathrm{e1}\right)$$

$$\phi := \mathrm{acos}\left[\frac{\mathrm{v}\cdot\left(\frac{\mathrm{e1}\cdot\mathrm{v}}{\mathrm{e1}\cdot\mathrm{e1}}\cdot\mathrm{e1} + \frac{\mathrm{e2}\cdot\mathrm{v}}{\mathrm{e2}\cdot\mathrm{e2}}\cdot\mathrm{e2} + \frac{\mathrm{e3}\cdot\mathrm{v}}{\mathrm{e3}\cdot\mathrm{e3}}\cdot\mathrm{e3}\right)}{|\mathrm{v}|\cdot\left|\frac{\mathrm{e1}\cdot\mathrm{v}}{\mathrm{e1}\cdot\mathrm{e1}}\cdot\mathrm{e1} + \frac{\mathrm{e2}\cdot\mathrm{v}}{\mathrm{e2}\cdot\mathrm{e2}}\cdot\mathrm{e2} + \frac{\mathrm{e3}\cdot\mathrm{v}}{\mathrm{e3}\cdot\mathrm{e3}}\cdot\mathrm{e3}\right|}\right] \qquad \phi \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{6}\cdot\pi$$

Рис. 1. Виконання обчислень в середовищі Mathcad

Відповідь: $\dfrac{\pi}{6}$.

Приклад 2. Залежність ознаки *Y* від ознаки *X* характеризується такими експериментальними даними:

X	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
Y	–4,9	–3,7	–2,3	–1,5	0,7	1,2	2,4	3,5	4,3	5,1	6,3

Методом найменших квадратів знайти коефіцієнти залежності $y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$. Побудувати графік отриманої функції.

Розв'язування. У програмному середовищі Mathcad формуємо таблицю експериментальних даних (рис. 2):

ICV 2019: 79.31
DOI 10.31494/2412-9208-2021-1-2

$ORIGIN := 1$

$n := 11 \quad i := 1..n$

$x_i := i - 8$

$y_1 := -4.9 \quad y_2 := -3.7 \quad y_3 := -2.3 \quad y_4 := -1.5 \quad y_5 := 0.7 \quad y_6 := 1.2 \quad y_7 := 2.4 \quad y_8 := 3.5 \quad y_9 := 4.3 \quad y_{10} := 5.1 \quad y_{11} := 6.3$

$x^T \rightarrow (-7\ \ -6\ \ -5\ \ -4\ \ -3\ \ -2\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3)$

$y^T \rightarrow (-4.9\ \ -3.7\ \ -2.3\ \ -1.5\ \ .7\ \ 1.2\ \ 2.4\ \ 3.5\ \ 4.3\ \ 5.1\ \ 6.3)$

Рис. 2. Таблиця експериментальних даних

Система чотирьох лінійних рівнянь з необхідних умов мінімуму функції $S(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{i=1}^{11} \left(y_i - \left(\alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 x_i^{\,2} + \alpha_3 x_i^{\,3}\right)\right)^2$ набирає вигляд:

$$\begin{cases} 11\alpha_0 - 22\alpha_1 + 154\alpha_3 - 748\alpha_4 = 11{,}1; \\ -22\alpha_0 + 154\alpha_1 - 748\alpha_3 + 4774\alpha_4 = 100{,}5; \\ 154\alpha_0 - 748\alpha_1 + 4774\alpha_3 - 28732\alpha_4 = -359{,}9; \\ -748\alpha_0 + 4774\alpha_1 - 28732\alpha_3 + 185614\alpha_4 = 3047{,}7. \end{cases}$$

Розв’язування отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса ілюструє рис. 3:

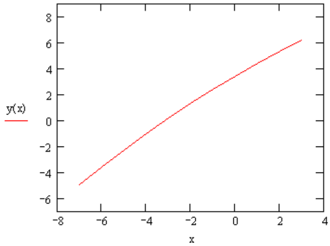
$$A := \begin{bmatrix} n & \sum_i x_i & \sum_i (x_i)^2 & \sum_i (x_i)^3 & \sum_i y_i \\ \sum_i x_i & \sum_i (x_i)^2 & \sum_i (x_i)^3 & \sum_i (x_i)^4 & \sum_i x_i \cdot y_i \\ \sum_i (x_i)^2 & \sum_i (x_i)^3 & \sum_i (x_i)^4 & \sum_i (x_i)^5 & \sum_i (x_i)^2 \cdot y_i \\ \sum_i (x_i)^3 & \sum_i (x_i)^4 & \sum_i (x_i)^5 & \sum_i (x_i)^6 & \sum_i (x_i)^3 \cdot y_i \end{bmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 11 & -22 & 154 & -748 & 11.1 \\ -22 & 154 & -748 & 4774 & 100.5 \\ 154 & -748 & 4774 & -28732 & -359.9 \\ -748 & 4774 & -28732 & 185614 & 3047.7 \end{pmatrix} \quad rref(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3.4156 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.0021 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.0295 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.0002 \end{pmatrix}$$

Рис. 3. Розв’язування системи лінійних рівнянь методом Гаусса

Отже, шукана залежність ознаки *Y* від ознаки *X* має вигляд: $y(x) = 3{,}4156 + 1{,}0021x - 0{,}0295x^2 - 0{,}0002x^3$. Графік отриманої функції ілюструє рис. 4. Під графіком наведено значення функції $y(x)$ (випадкової величини *Y*), обчислені для відповідних значень *x* (випадкової величини *X*).

DOI 10.31494/2412-9208-2021-1-2

$y(x) := 3.4156 + 1.0021 \cdot x - 0.0295x^2 - 0.0002x^3$



$x^T \rightarrow (-7\ \ -6\ \ -5\ \ -4\ \ -3\ \ -2\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3)$

$y_i := y(x_i)$

$y^T \rightarrow (-4.9760\ \ -3.6158\ \ -2.3074\ \ -1.0520\ \ .1492\ \ 1.2950\ \ 2.3842\ \ 3.4156\ \ 4.3880\ \ 5.3002\ \ 6.1510)$

Рис. 4. Графік функціональної залежності ознаки Y від ознаки X

Відповідь: $y(x) = 3{,}4156 + 1{,}0021x - 0{,}0295x^2 - 0{,}0002x^3$.

Висновки. Основні висновки нашого дослідження містять такі положення:

- включення комп’ютерно-орієнтованих елементів навчання до методичних систем навчання математичних дисциплін майбутніх учителів математики сприяє формуванню в них інформатичної компетентності;
- методичні напрацювання з проблеми ефективного використання комп’ютерно-орієнтованих елементів на прикладі навчання лінійної алгебри та теорії ймовірностей із елементами математичної статистики можуть бути результативно використані студентами та викладачами педагогічних закладів освіти у власній науково-педагогічній діяльності та самоосвіті;
- технічно забезпечене і методично продумане застосування комп’ютерно-орієнтованих елементів навчання математичних дисциплін сприятиме розв’язанню проблеми неефективного використання навчального часу.

Перспективним напрямом подальшого наукового пошуку, на нашу думку, є розробка комп’ютерно-орієнтованих елементів навчання математичних дисциплін студентів нематематичних спеціальностей з метою підвищення рівня їхніх навчальних досягнень з математики.

Література

Коваленко І. П. Вища математика. Навчальний посібник. / Іван Коваленко. – К. : Видавничий Дім «Слово», 2011. – 456 с.

Красножон О. Б, Мацюк В. В. Комп’ютерна підтримка вивчення теми «Кореляційний зв'язок, коефіцієнт кореляції» курсу теорії ймовірностей із елементами математичної статистики / Олексій Красножон, Василь Мацюк // Наукові записки Бердянського державного педагогічного університету. Серія : Педагогічні науки : зб. наук. пр. – Вип. 3. – Бердянськ : БДПУ, 2020. – С. 56-65.

ICV 2019: 79.31
DOI 10.31494/2412-9208-2021-1-2

Кушлик-Дивульська О. І. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб./ О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Б. П. Орел, П. І. Штабалюк. – К: НТУУ «КПІ», 2014. – 212 с.

Нечаев В. А. Задачник-практикум по алгебре. Группы. Кольца. Поля. Векторные и евклидовы пространства. Линейные отображения. / Василий Нечаев. – М. : Просвещение, 1983. – 120 с.

Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник / О. І. Огірко, Н. В. Галайко. – Львів: ЛьвДУВС, 2017. – 292 с.

Рябушко А. П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч. 4. Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика : учеб. пособие / Антон Рябушко. – 3 изд. – Минск : Выш. шк., 2010. – 336 с.

References

Kovalenko, I.P. (2011). *Vyshcha matematyka [Higher mathematics].* Kyiv: Slovo Publishing House [in Ukrainian].

Krasnozhon, O.B., & Matsyuk, V.V. (2020). Komp’yuterna pidtrymka vyvchennya temy «Korelyatsiynyy zv'yazok, koefitsiyent korelyatsiyi» kursu teoriyi ymovirnostey iz elementamy matematychnoyi statystyky [Computer support of studying the topic "Correlation", correlation coefficient "of the course of probability theory with elements of mathematical statistics]. *Naukovi zapysky Berdyans’koho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu – Scientific notes of Berdyansk State Pedagogical University, Vol. 3,* 56-65 [in Ukrainian].

Kushlyk-Divulska, O.I., Polishchuk, N.V., Orel, B.P., & Shtabalyuk, P.I. (2014). *Teoriya ymovirnostey ta matematychna statystyka [Probability theory and mathematical statistics].* Kyiv: NTUU "KPI" [in Ukrainian].

Nechaev, V.A. (1983). *Zadachnik-praktikum po algebre [Algebra workshop].* Moscow: Education [in Russian].

Ogirko, O.I., & Galaiko, N.V. (2017). *Teoriya ymovirnostey ta matematychna statystyka [Theory of probabilities and mathematical statistics].* Lviv: LvDUVS [in Ukrainian].

Ryabushko, A.P. (2010). *Individual'nyye zadaniya po vysshey matematike: operatsionnoye ischisleniye, elementy teorii ustoychivosti, teoriya veroyatnostey, matematicheskaya statistika [Individual tasks in higher mathematics: operational calculus, elements of stability theory, probability theory, mathematical statistics].* Minsk: Higher school [in Russian].

АНОТАЦІЯ

Стаття присвячена питанням побудови ефективних комп’ютерно-орієнтованих компонентів методичної системи навчання дисциплін «Лінійна алгебра» та «Теорія ймовірностей із елементами математичної статистики», які передбачені освітньо-професійною програмою «Середня освіта (математика)» першого рівня вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (Математика). У статті проаналізовано методичні аспекти ефективної організації обчислень при знаходженні кута між даним вектором і ненульовим підпростором евклідового простору, а також застосуванні методу найменших квадратів для опрацювання експериментальних даних. Стисло наведені теоретичні та практичні відомості, засвоєні студентами-математиками у відповідних розділах зазначених навчальних дисциплін. Проаналізовано навчальну, методичну та наукову літературу, яка використовується під час навчання лінійної алгебри та теорії ймовірностей із

DOI 10.31494/2412-9208-2021-1-2

елементами математичної статистики; обґрунтовано доцільність використання комп'ютерно-орієнтованих елементів навчання математичних дисциплін майбутніх учителів математики. Авторами запропоновано використання комп'ютерно-орієнтованих елементів навчання під час опрацювання змісту дисциплін та розробки тестових завдань різного рівня складності з лінійної алгебри та теорії ймовірностей із елементами математичної статистики з метою об'єктивного оцінювання рівня навчальних досягнень студентів та своєчасного коригування індивідуальних освітніх траєкторій. У статті наведено приклади застосування комп'ютерно-орієнтованих елементів навчання лінійної алгебри та теорії ймовірностей із елементами математичної статистики, а також проаналізовано методичні особливості організації обчислень у програмному математичному середовищі Mathcad. Методичні та практичні матеріали можуть бути корисними студентам для організації та активізації самостійної наукової та навчальної діяльності, учителям закладів загальної середньої освіти, керівникам факультативної й гурткової роботи учнів, викладачам курсів лінійної алгебри та теорії ймовірностей із елементами математичної статистики педагогічних ВНЗ.

Ключові слова: *методика навчання математики, комп'ютерно-орієнтовані елементи навчання математики, лінійна алгебра, теорія ймовірностей, математична статистика, евклідовий простір, ненульовий підпростір евклідового простору, метод найменших квадратів.*

ICV 2019: 79.31
DOI 10.31494/2412-9208-2021-1-2